الجمهورية اليمنية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العلوم الحديثة

كلية التعليم المفتوح وعن بعد

جامعة العلوم الحديثة
UNIVERSITY OF MODERN SCIENCES

الإحصـــاء

المحاضرة السابعة

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

مقاييس المتوسطات (للبيانات الإحصائيه المبوبه)

عند عرض قيم البيانات لظاهرة ما في توزيع تكراري يطلق على هذه البيانات بيانات مبوبه يث توضع قيمة تلك البيانات الإحصائيه داخل فئات معينه تقع في مداها .

المتوسط الحسابي :

هناك طريقتان لتقدير قيمة المتوسط في حالة البيانات المبوبه هما :

تقدير المتوسط الحسابي بالطريقه المباشره :

ولتقدير المتوسط يتم إيجاد مراكز الفئات ثم الضرب في التكرارات المقابله لكل فئه ثم القسمه على إجمالي التكرارات وذلك كما يلي :

- إيجاد مراكز الفئات عن طريق جمع الحد الأدنى و الأعلى للفئه و القسمه على **2** ورمز مركز الفئه **Xi** .
- إيجاد عمود **Fixi** وذلك بضرب مراكز الفئات **Xi** في التكرار المقابل للفئه **Fi** .
- جمع عمود **Fixi** ويكون الناتج عباره عن $\sum Fixi$.
- قسمة $\sum Fixi$ على مجموع التكرارات $\sum Fi$.

الصيغه الرياضيه للمتوسط الحسابي بالطريقه المباشره هي $\bar{} \times = \frac{\sum Fixi}{\sum Fi}$

مثال :

أوجد قيمة المتوسط الحسابي بالطريقه المباشره للجدول التكراري الأتي:

الفئات	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	16 – 14	المجموع
التكرارات	2	3	5	5	3	2	20

الحل :

الفئات	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	16 – 14	المجموع
التكرارات (F)	2	3	5	5	3	2	20
مركز الفئه (Xi)	5	7	9	11	13	15	–
Fixi	10	21	45	55	39	30	200

∴ قيمة المتوسط بالطريقه المباشره =

$$\bar{x} = \frac{\sum Fixi}{\sum Fi} = \frac{200}{20} = 10$$

تقدير المتوسط الحسابي بالطريقه غير المباشره :

يطلق على هذه الطريقه بالطريقه المطوله ويتم فيها إختيار أي قيمه من عمود مراكز الفئات و إعتبارها متوسط فرضي ويرمز له بالرمز (A) ثم يطرح المتوسط الفرضي من كل قيمه من عمود مراكز الفئات وتوضع القيم الباقيه في عمود (A-Xi) ويطلق على تلك القيم بإنحرافات مراكز الفئات عن المتوط الفرضي وصيغته الرياضيه :

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Fi\,(xi - A)}{\sum Fi}$$

مثال :

أوجد قيمة المتوسط الحسابي بالطريق غير المباشره للجدول التكراري الاتي :

الفئات	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	16 – 14	المجموع
التكرارات	2	3	5	5	3	2	20

الحل :

الفئات	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	16 – 14	المجموع
التكرارات (F)	2	3	5	5	3	2	20
مركز الفئه (Xi)	5	7	9	11	13	15	–
(X – A)	6–	4–	2–	0.0	2	4	–
Fi (X – A)	12–	12–	10–	0.0	6	8	20 –

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Fi\,(xi - A)}{\sum Fi}$$

$$\bar{x} = 11 + \frac{-20}{20} = 10$$

الوسيط :

يمكن إيجاد الوسيط بثلاث طرق

الطريقه الأولى : بإستخدام الرسم البياني عن طريق إسقاط عمود على المحور الأفقي أي محور الفئات من نقطه تقاطع المنحنى التكراري المتجمع الصاعد مع المنحنى التكراري المتجمع الهابط وتكون القراءه هي قيمة الوسيط .

الطريقه الثانيه : بواسطة رسم كل من التكرار المتجمع الصاعد و الهابط على حده حيث يحدد موقع ترتيب الوسيط على محور التكرارات وعمل خط بإتجاه منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو الهابط و إسقاط عمود من نقطة التقاطع في إتجاه محور الفئات فيقطعه في نقطه هي قمة الوسيط

الطريقه الثالثه : بإستخدام الطريقه الحسابيه وذلك بإيجاد التكرار المتجمع الصاعد و الهابط كالتالي :

إيجاد قيمة الوسيط بإستخدام التكرار المتجمع الصاعد :

الوسيط =	الحد الأدنى + الفئه الوسطيه	ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئه الوسطيه / التكرار الأصلي للفئه الوسطيه	Xطول الفئه

إيجاد قيمة الوسيط بإستخدام التكرار المتجمع الهابط :

الوسيط =	الحد الأدنى + الفئه الوسطيه	ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع الهابط للفئه الوسطيه / التكرار المتجمع الهابط التالي للفئه الوسطيه – التكرار المتجم الهابط للفئه الوسطيه	Xطول الفئه

- **الفئه الوسطيه عباره عن الفئه التي تحوي أكبر تكرار أو الأقرب إلى ترتيب الوسيط .**
- **ترتيب الوسيط عباره عن نصف مجموع عدد التكرارات أو قسمة التكرارات على أثنين .**
- **طول الفئه عباره عن الفرق بين حدي الفئه .**

مثال :

أوجد قيمة الوسيط للتوزيع التكراري الأتي بطريقة التكرار المتجمع الصاعد والهابط؟

الفئات	4 – 2	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	المجموع
التكرارات	2	6	10	12	4	6	40

الحل : بإستخدام التكرار المتجع الصاعد :

الفئات	4 – 2	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	المجموع
التكرارات (F)	2	6	10	(12)	4	6	40
التكرار المتجمع الصاعد	2	8	18	(30)	34	40	–

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

- الفئه الوسطيه هي الفئه (8 – 10) لأنها تحتوي على أكبر تكرار (12)
- الحد الأدنى للفئه الوسطيه = 8
- طول الفئه = (8 – 6) = 2
- التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئه الوسيطه = 18

ترتيب الوسيط = مجموع التكرارات = $\frac{40}{2}$ = 20

$$Me = 8 + \left(\frac{20-18}{12}\right) * 2 = 8.33$$

بإستخدام التكرار المتجع الهابط :

الفئات	4 – 2	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	المجموع
التكرارات (F)	2	6	10	(12)	4	6	40
التكرار المتجمع الهابط	40	38	32	(22)	10	6	–

- الفئه الوسطيه هي الفئه (8 – 10) لأنها تحتوي على أكبر تكرار (12)
- الحد الأدنى للفئه الوسطيه = 8 ، التكرار المتجمع الهابط للفئه الوسطيه = 22
- التكرار المتجمع الهابط التالي للفئه الوسيطه = 10

ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{40}{2}$ = 20

$$Me = 8 + \left(\frac{20-22}{10-22}\right) * 2 = 8.33$$

المنوال :

يمكن إيجاد المنوال في البيانات المبوبه أو الجداول التكراريه بيانياً بثلاث طرق :

الطريقه الأولى : بإستخدام الرسم البياني مثل الوسيط .

الطريقه الثانيه : بإستخدام المدرج التكراري من خلال الرسم للمستطيل الذي يمثل أكبر التكرارات و المستطيلين الذي بجانبه ثم توصيل الرأس الأيمن للمستطيل الأطول بالرأس الأيمن العلوي للمستطيل السابق له وتوصيل الرأس الأيسر للمستطيل الأطول بالرأس الأيسر للمستطيل التالي له ، ينتج عن ذلك تقاطع و الذي منه يتم إسقاط عمود في إتجاه المحور الأفقي محور الفئات وهو قيمة المنوال، ويعتبر أفضل المتوسطات للتوزيع المتماثل اما التوزيع شديد الإلتواء لا ينصح بإستخدامه لأن القيم تكون بعيده عن متوسط المجموعه ويصبح من القيم المتطرفه .

الطريقه الثالثه : بإستخدام الطريقه الحسابيه بواسطة الصيغه التاليه :

$$Me = 8 + \left(\frac{20-22}{10-22}\right) * 2 = 8.33$$

L= الحد الأدنى للفئه المنواليه وهي الفئه التي تحوي أكبر تكرار .

D1= الفرق المطلق بين تكرار الفئه المنواليه و الفئه السابقه لها .

D2= الفرق المطلق بين تكرار الفئه المنواليه و الفئه التاليه لها.

I = طول الفئه عباره عن الفرق بين حدي الفئه الأعلى و الأدنى .

مثال :

الجدول الأتي يوضح تقديرات **60** طالب في امتحان مبادئ الإحصاء في كليت إحدى الجامعات والمطلوب تحديد المنوال ؟

التقدير	ممتاز	جيدجداً	جيد	مقبول	ضعيف	ضعيف جداً
عدد الطلاب	3	7	(20)	15	13	2

الحل :

المنوال هو تقدير جيد لأنه يحتوي على أكبر عدد من الطلاب والذي يمثل عدد التكرارات **F**

مثال :

أوجد قيمة المنوال للتوزيع التكراري الأتي :

الفئات	4 – 2	6 – 4	8 – 6	10 – 8	12 – 10	14 – 12	المجموع
التكرارات	2	6	10	(12)	4	6	40

الحل :

- الفئه المنواليه هي الفئه (8 – 10) لأنها تحتوي على أكبر تكرار (12)
- الحد الأدنى للفئه المنواليه (L) = (8)
- تكرار الفئه المنواليه = (12)
- تكرار الفئه السابقه للفئه المنواليه = (10)
- طول الفئه المنواليه (l)= (2)
- تكرار الفئه التاليه للفئه المنواليه = (4)

D1= 12 - 10 =2 D2 = 12 – 4 =8

$$MO = L + \left(\frac{D1}{D1+D2}\right) * I$$

$$MO = 8 + \left(\frac{2}{8+2}\right) * 2 = 8.4$$

تقدير المنوال في حالة عدم تساوي طول الفئات :

مثال :

أوجد قيمة المنوال للتوزيع التكراري الأتي :

الفئات	4 – 2	6 – 4	8 – 6	12 – 8	18 – 12	24 – 18	المجموع
التكرارات الأصليه	2	6	10	12	(18)	12	60

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

الحل :

طول الفئات غير متساوي ولإيجاد التكرار المعدل بقسمة التكرار الاصلي على طول الفئه ويصبح الجدول كالتالي:

الفئات	4 – 2	6 – 4	8 – 6	12 – 8	18 – 12	24 – 18	المجموع
التكرارات الأصليه	2	6	10	12	(18)	12	60
التكرارات المعدله	1	3	(5)	3	3	2	17

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكرار الأصلي}}{\text{طول الفئه}}$$

- الفئه المنواليه هي الفئه (6 – 8) لأنها تحتوي على أكبر تكرار (5)
- الحد الأدنى للفئه المنواليه (L) = (6)
- تكرار الفئه المنواليه = (5)
- تكرار الفئه السابقه للفئه المنواليه = (3)
- تكرار الفئه التاليه للفئه المنواليه = (3)

$$MO = L + \left(\frac{D1}{D1+D2}\right) * I$$

$$MO = 6 + \left(\frac{2}{2+2}\right) * 2 = 7$$

خصائص مقاييس المتوسطات :

المتوسط الحسابي :

أهم المميزات :

- أكثر المتوسطات إستخداماً .

- مقياس مألوف وسهل .
- واضح ويأخذ في الإعتبار جميع مفردات قيم أو بيانات الظاهره.
- قيمته غير متحيزه وتقريباً تكون ثابته .
- يستخدم في كثير من الإختبارات المختلفه .

أهم العيوب :

- قيمته قد تكون غير ممثله خصوصاً عند وجود الالتواء بالتوزيع لذا يفضل إستخدام الوسيط أو المنوال .
- لا يمكن إستخدامه في االقيم الوصفيه مثل اللون ' النوع ... إلخ .
- يصعب تقدير قيمته من الجداول التكراريه المفتوحه بالطريقه المباشره والغير مباشره لإعتماده على مراكز الفئات .
- يتأثر بالقيم المتباعده إن وجدت في العينه .
- تكون قيمته مظلله في حاة البيانات الإحصائيه لعينه ذات توزيع تكراري ملتوي .

الخصائص الرياضيه للمتوسط الحسابي :

- مجموع إنحافات القيم عن الوسط الحسابي يساوي صفر ويمكن إثبات ذلك كالتالي :

$$\overline{\times} = \frac{\sum \mathbf{xi}}{\boldsymbol{n}} \qquad \overline{\times} = \frac{\sum \mathbf{Fi\ xi}}{\sum \boldsymbol{Fi}}$$

$$\sum \mathbf{xi} = \mathbf{n}\,\overline{\times} \qquad \sum \mathbf{Fixi} = \sum \mathbf{Fi}\,\overline{\times}$$

$$\sum(\mathbf{Xi} - \overline{\boldsymbol{X}}) = \mathbf{0} \qquad \frac{\sum \mathbf{Fixi} - \sum \boldsymbol{Fi}\overline{\boldsymbol{X}}}{\sum \boldsymbol{Fi}}$$

$$\sum \left(\mathbf{xi} - \frac{\sum \mathbf{X}}{\mathbf{n}} \right) \qquad \frac{\sum \mathbf{F}\,(\mathbf{Xi} - \overline{\mathbf{X}})}{\sum Fi}$$

$$\sum \sum = \mathbf{n} \sum \qquad \frac{\sum \mathbf{Fixi} - \sum Fi\,\overline{\mathbf{x}}}{\sum Fi} = \mathbf{0}$$

$$\sum Xi - \frac{n \sum \mathbf{xi}}{n}$$

$$\sum Xi - \sum Xi = 0$$

$$\sum Xi - n\,\overline{X} = 0$$

$$n\,\overline{x} - n\,\overline{x} = 0$$

- مجموع مربعات إنحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أقل من مجموع مربعات إنحرافات القيم عن أي قيمه أخرى فمثلاً عند اخذ **A** كمتوسط فرضي فإن :

$$\sum \quad (\overline{\mathbf{x}}\,i - X)^2 < \sum \quad (\mathbf{x}\,i - A)^2$$

- بإضافة أو حذف أي رقم وليكن **E** إلى أو من كل القيم أو مراكز الفئات (**Xi**) ، فأن المتوسط الحسابي يزيد في حالة الإضافه أو يقل في حالة الحذف بالمقدار (**E**) كما يلي :

$$\frac{\sum(xi+E)}{n} = X + E \quad , \quad \frac{\sum Fi(xi+E)}{\sum F} = X - E$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{\sum(xi+E)}{n} - E \quad , \quad \bar{X} = \frac{\sum(xi+E)}{\sum F} + E$$

- حاصل ضرب المتوسط في مجموع التكرارات يساوي حاصل ضرب التكرارات في مراكز الفئات وذلك كما يلي :

$$\bar{X} = \frac{\sum FI\ XI}{\sum FI} - \bar{E} \quad \therefore X \sum FI = \sum F1\ Xi$$

- إذا تم تقسيم حاصل ضرب التكرارات في مراكز الفئات أو القيم على رقم ثابت وليكن الرقم (E) فأن قيمة المتوسط الحسابي تقسم على (E) كما يلي :

$$\frac{\sum FI\left(\frac{X}{E}\right)}{\sum FI} = \frac{\bar{X}}{E} \qquad \therefore X = \frac{\sum FI\left(\frac{X}{E}\right)*E}{\sum FI}$$

- عند قسمه أو ضرب التكرارات في أي رقم ثابت لا يتغير المتوسط الحسابي
- إذا تم ضرب أي رقم ثابت وليكن (E) في مراكز الفئات أو القيم (Xi) فأن المتوسط الحسابي يزيد بمقدار الرقم (E) مره واحده .

$$\frac{\sum(Xi*E)}{n} = X * E \quad , \quad \frac{\sum FI(Xi*E)}{\sum FI} = X * E$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{\sum(Xi*E)}{En} \quad , \quad \therefore \bar{X} = \frac{\sum Fi(Xi*E)}{E\sum Fi}$$

الوسيط :

أهم المميزات :

- سهل الفهم و اتقدير و وضوح فكرته .
- لا تتأثر قيمة الوسيط بالقيم المتطرف أوالشاذه إن وجدت في العينه .

- قيمته تتحدد عند القيمه التي ترتيبها في البيانات 50% من عدد المفردات أو المشاهدات .
- يمكن تقديره من الجداول التكراريه المفتوحه بالطريقه المباشره .
- أفضل المتوسطات لتمثيل البيانات الوصفيه أو غير الرقميه .

أهم العيوب :

- غير شائع الإستخدام مقارنه بالمتوسط الحسابي لأن قيمته موقعيه أو مكانيه فقط .
- عند تقدير قيمته يتطلب الأمر ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً .
- أقل ثباتاً من المتوسط الحسابي عند إعادة تقديره لعينه أخرى تم أخذها من مجتمع واحد .
- تتوقف قيمته على إختيار فئات التوزيع التكراري التي تحتوي على أكبر تكرار .
- ليس حساساً بدرجه مناسبه عند حدوث تغير ببعض المفردات لان ذلك يؤثر بقيمة الوسيط .

المنوال :

أهم المميزات :

- أفضل المتوسطات لتمثيل البيانات الوصفيه مثل اللون ، الحاله الإجتماعيه .. إلخ
- أوفق المتوسطات لأنه يعبر عن القيمه التي تتركز أو تتجمع عندها القيم .
- ليس حساساً بالدرجه المناسبه عند حدوث تغير في بعض قيم المفردات لأن ذلك لا يؤثر في قيمته .
- لا تتأثر قيمته بالقيم المتطرفه أو الشاذه إن وجدت .
- سهل الفهم و التقدير لأنه عباره عن القيمه الأكثر تكراراً .

- وضوح فكرته الأساسيه .
- يمكن تقديره في الجداول التكراريه المفتوحه .

أهم العيوب :

- غير شائع الإستخدام مقارنه بالمتوسط الحسابي .
- قد تتكرر قيم و تتساوى في تكرارها وبالتالي لا يمكن تحديد المنوال .
- قد لا توجد قيمه مكرره في حالة البيانات المبوبه وبالتالي لا يمكن تقديره .
- يعتبر أقل ثباتاً من المتوسط الحسابي عند إعادة حسابه لعينه أخرى من نفس المجتمع .
- ليس مقياساً دقيقاً لأنه يعتبر متوسطاً مكانياً وليس متوسطاً حسابياً .
- تتوقف قيمته على إختيار فئات التوزيع التكراري التي تحتوي على أكبر تكرار .
- صعوبة التعرف عليه بصوره مباشره في حالة البيانات المبوبه .
- يتوقف إختياره على القيمه الأكثر تكراراً .
- يتوقف تقديره في البيانات المبوبه بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً.

العلاقه بين مقاييس المتوسطات :

العلاقه بين المتوسط الحسابي و الوسيط والمنوال :

لا يمكن في الجداول المفتوحه تقدير المتوسط الحسابي بصوره مباشره ، لأن المتوسط الحسابي يعتمد في تقديره على مراكز الفئات .

وكذلك المنوال لا يمكن تقديره حالة الجداول التكراريه التي تكون فيها الفئه المنواليه هي الأولى أو الأخيره ، لأن المنوال يعتمد عند بصوره مباشره تقدير على الفئه التي تلي أو تسبق الفئه المنواليه وكذلك الحال بالنسبه للوسيط إذا كانت الفئه الوسطيه التي تحوي أكبر عدد من التكرارات هي الفئه الأولى .

و يمكن إيجاد قيمة المتوسط الحسابي للجداول التكراريه المفتوحه بصوره غير مباشره بواسطة العلاقه بين كلاً من المتوسط الحسابي و الوسيط والمنوال وهي كما يلي :

(المتوسط الحسابي – المنوال) = 3 (المتوسط الحسابي – الوسيط)

$$3\,(\bar{X} - Me) = (\bar{X} - Mo)$$

فإذا كان المطلوب إيجاد أو تقدير قيمة المتوط الحسابي فسيكون كالتالي :

$$3\bar{X} - 3\,Me = \bar{X} - Mo$$

$$3\bar{X} - \bar{X} = 3\,Me - Mo$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{3\,Me - Mo}{2}$$

$$Mo = 3\,Me - 2\bar{X}$$

والله الموفق،،،

اسئلة المحاضرة السابعة:

س1) عرف النزعة المركزية، واذكر اهم مقاييسها. وادكر عيوب ومميزات كل مقياس

س2) اكتب الصيغ الرياضية لكل من (1) المتوسط الحسابي (2) الوسيط (3) المنوال (4) العلاقة بين كل من المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال

س3) اكمل الفراغات في الجمل التالية:

1. هناك طريقتان لتقدير قيمة المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة هما : (1) ..... (2) .....
2. يمكن ايجاد المنوال من الجداول التكرارية بثلاث طرق هي (1) ..... (2) ..... (3) .....

س4) ضع علامة صح او خطأ مع ثم قم بتعديل الخطأ إن وجد في الجمل التالية:

1. عند عرض بيانات ظاهرة ما في جدول توزيع تكراري يطلق على بياناتها بيانات غير مبوبه ..... ( )
2. عند تحديد الوسيط تكون الفئة الوسيطيه هي الفئة الأقل تكرارا ..... ( )
3. من اهم عيوب المتوسط الحسابي أنه يأخذ جميع القيم في الاعتبار ..... ( )
4. لا يمكن استخدام الوسيط في البيانات الوصفية غير الرقمية ..... ( )
5. مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي أكبر من الصفر ..... ( )

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380