الجمهورية اليمنية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العلوم الحديثة

كلية التعليم المفتوح وعن بعد

جامعة العلوم الحديثة
UNIVERSITY OF MODERN SCIENCES

الرياضة البحتة

المحاضرة الخامسة

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

المحددات:

مفهوم المحدد ودرجته:

المحدد عبارة عن منظومة من الأعداد(أو العناصر) مرتبه في شكل صفوف وأعمده بحيث يكون عدد الصفوف مساو لعدد الأعمدة ،وتكتب هذه المنظومة من الأعداد أو العناصر بين خطين رأسيين

متوازيين (||).

وتحدد درجة المحدد بناء على عدد الصفوف وعدد الأعمدة فالعناصر

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

يمكن ترتيبها في الشكل صفين وعمودين على النحو التالي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

تمثل محدداً من الدرجة الثانية :

كما أن الأعداد

2,4,6,-5,7,8,9,1,3

يمكن ترتيبها في شكل ثلاثة صفوف وثلاثة أعمده على النحو التالي :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -5 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

تمثل محددا من الدرجة الثالثة وهكذا.

المحيدد: Minor.

محيدد أي عنصر عبارة عن محدد جديد ناتج من المحدد الأصلي بعد حذف جميع عناصر الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر .

فمثلاً محيدد العنصر(a_{11}) في المحدد

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يمكن كتابته في الصورة التالية :

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وبالمثل فأن محدد العناصر (a_{23})هو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

وهكذا فأنه يمكن إيجاد محيددات العناصر الأخرى في المحدد السابق بنفس الأسلوب .

- **العامل المرافق:**

العامل المرافق للعنصر (a_{ij}) من عناصر المحدد هو عبارة عن المحدد

(Δ_*) لمحيدد هذا العنصر مسبوقاً بإشارة (موجبه أو سالبه)، ويتم إيجاده عن طريق إلغاء باقي عناصر الصف وكذلك باقي عناصر العمود الموجود به هذا العنصر وبحيث يكون العامل المرافق هو العنصر الباقي :

ويتوقف نوع الإشارة التي تسبق محيدد مرافق أي عنصر على كون مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر زوجياً أو فردياً وفقاً للقاعدة

القاعدة :

إذا كان مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر زوجياً كانت الإشارة موجبه (+)، أما إذا كان مجموع ترتيب الصفوف والعمود الواقع فيهما العنصر فردياًَ كانت الإشارة سالبه (-).

ويمكن تحديد الإشارة الجبرية لموضع العامل المرافق للعنصر وفقاً للعلاقة التالية :

حيث أن:

$$\widetilde{a_{ij}}=(-1)^{i+j}\times\Delta_*$$

$\tilde{a}$: مرافق العنصر

ijترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر :

Δ_* : محدد محيدد العنصر (a_{ij})بعد حذف الصف(i)والعمود(j)

الواقع فيهما العنصر.

مثالـــــــ :

باستخدام بيانات المحدد التالي :

$$|W|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

أوجد مرافقات العنصرين (a_{11}, a_{23})

الحل:

وفقاً للعلاقة السابقة ،فإن مرافقات العنصرين تكون في الصورة التالية

*مرافق العنصر (a_{11})هو

$$\widetilde{a_{11}}=(-1)^{1+1}*\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{a_{23}}=(-1)^{2+3}*\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- **إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية:**

لكل محدد مهما اختلفت درجته قيمه تتعين بإيجاد مفكوك ذلك المحدد بطريقه المحيددات المرافقة وسوف نرمز لهذه القيمة بالرمز ((Δ)) وبالتالي فانه لإيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية باستخدام هذا الطريقة يتم اذاً إتباع الخطوات التالية :

1) تحديد الإشارات الخارجية لعناصر الصف الأول أو العمود الأول:

إذن الإشارات الخارجية لعناصر العمود الأول ستكون وفقا للترتيب التالي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix}$$

2) إيجاد مرافق كل عنصر من العناصر الصف الأول أو العمود الأول.

يتم إيجاد مرافق كل عنصر،عن طريق إلغاء باقي عناصر الصف وكذلك باقي عناصر العمود الموجود به هذا العنصر وبحيث يكون المرافق هو العنصر الباقي

3) إيجاد قيمه الحدد(Δ)

قيمه المحدد (Δ)=(+)العنصر الأول في العمود الأول*المرافق العنصر(-) العنصر الثاني في العمود الأول*مرافق العنصر وباستخدام بيانات المحدد السابقة فإن قيمه المحدد تكتب في الصورة التالية

$$\Delta=(+)[a_{11} \times a_{22}](-)[a_{21} \times a_{12}]$$

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

مثالـــــ :

أوجد قيمة المحدد $C=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

الحل:

قيمة المحدد(Δ)=

(+)العنصر الأول في العمود الأول×مرافق العنصر

(-)العنصر الثاني في العمود الأول×مرافق العنصر

$\therefore$=(+)$[2 \times 3]$(-)$[4 \times 1]$

=(2× 3)-(4× 1)

= 6-4 = 2

مثالـــــ :

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

الحل:

(Δ)=+(3× 4)(-)(-2×1)

= 12+2 = 14

إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة:

لإيجاد قيمه المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام طريقة المرافق سنتبع الخطوات :

1) تحديد الإشارة الخارجية لعنصر العمود الأول ستكون وفقاً للترتيب التالي :

$$\begin{array}{c} (+) \\ (-) \\ (+) \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) إيجاد مرافق كل عنصر من عنصر الصف الأول أو العمود الأول :
يتم إيجاد مرافق كل عنصر وذلك بإلغاء باقي عناصر كل من العمود والصف الموجود به هذا العنصر.

3) إيجاد قيمة الحدد (Δ)
قيمة المحدد (Δ) =(+) العنصر الأول في العمود الأول

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

×محيدد هذا العنصر
(-) العنصر الثاني في العمود الأول× محيدد هذا العنصر
(+) العنصر الثاني في العمود الأول × محيدد هذا العنصر

مثال:

أوجد قيمة المحدد

$$|W| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

والحل: قيمة المصدر (دلتا) باستخدام عناصر العمود الأول=

$$(+)(2)\times \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(-)(3)\times \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(+)(1)\times \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2\times \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3\times \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1\times \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=2(5\times4-7\times4)-3(1\times4-2\times6)+1(1\times7-6\times5)$$

$$=2(6)-3(-8)+1(-23)$$

$$=12+24-23=13$$

ويمكن استخدام عناصر الصف الأول لإيجاد قيمة المصدر السابق وهي نفس القيمة التي تم التوصل إليها باستخدام عناصر العمود الأول.

وهناك طريقه أخرى تستخدم لإيجاد قيمه المحدد من الدرجة الثالثة فقط ويطلق على هذه الطريقة (قاعدة ساروس).

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

- **إيجاد قيمه المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام قاعدة ساروس sarrus Rule**

تعمل قاعدة ساروس لإيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة وفقا للخطوات التالية:

1-يتم كتابه العمود الأول والثاني خارج المحدد على اليمين منه.

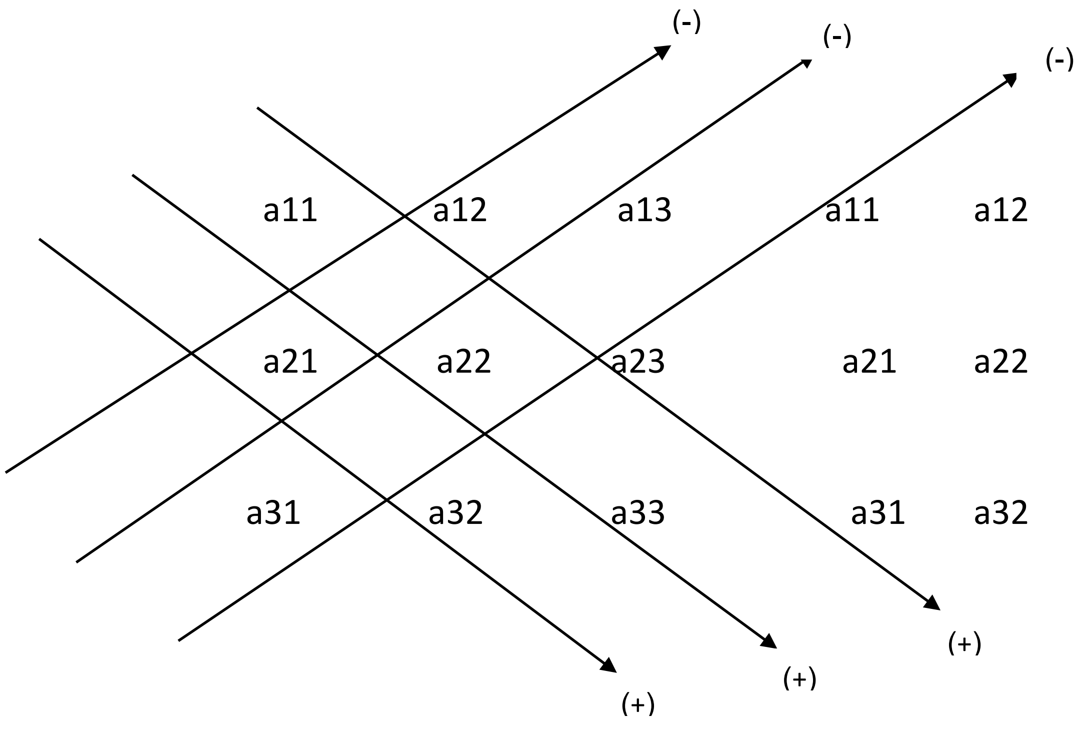
2-يتم تحديد الأقطار الرئيسية بثلاثة أسهم من الشمال إلى اليمين متجهه(من الأعلى إلى الأسفل)،وتعطى لكل منها الإشارة الجبرية (+).

3-يتم تحديد الأقطار الفرعية من خلال ثلاثة أسهم من الأسفل إلى الأعلى وتعطي لكل منها الإشارة الجبرية (-)

والمثال التالي يوضح عمل هذه القاعدة:

مثال:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



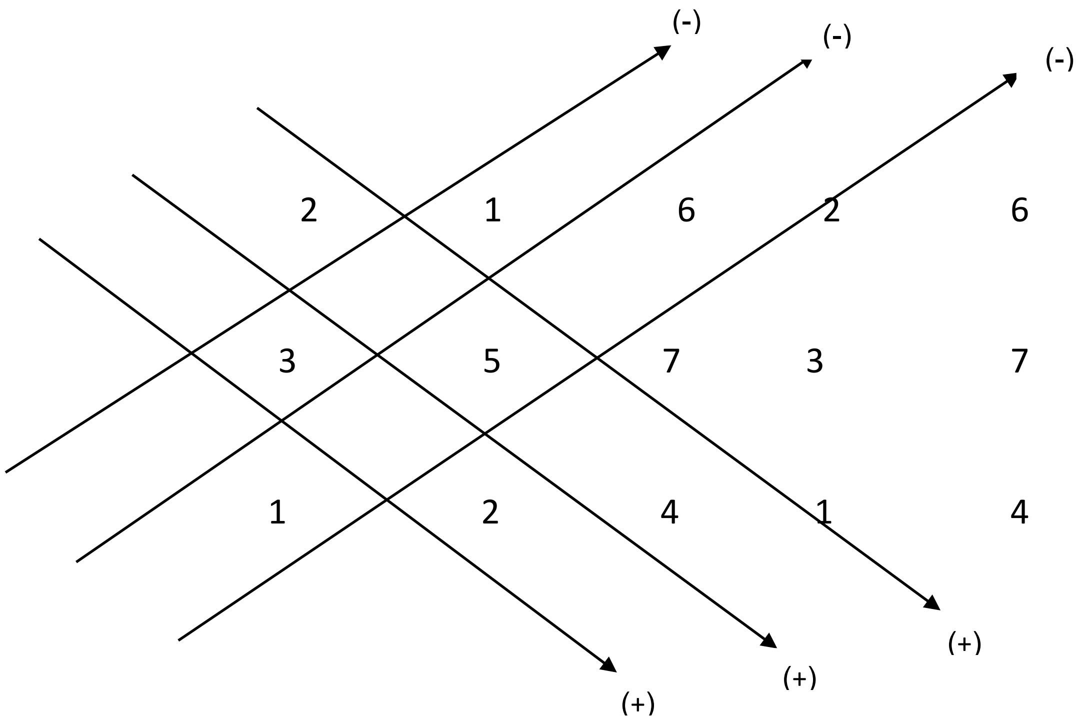
جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

$\Delta=(a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32})-(a_{31}.a_{22}.a_{13}+a_{32}.a_{23}.a_{11}+a_{33}.a_{21}.a_{12})$

مثالــــــ :

أوجد قيمة المحدد مستخدم قاعدة ساروس

$$|Aw|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 6\\ 3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$$



$\Delta=(2\times5\times4+1\times7\times1+6\times3\times2)-(1\times5\times6+2\times7\times2+4\times3\times1)$

$=(45+7+36)-(30+28+12)$

$=83-70=13$

- **خواص المحددات:**

الخاصية الأولى:

إذا احتوت محدد ما على صف أو عمود جميع عناصره أصفار فإن قيمة مفكوك هذا المحدد تساوي صفر

مثالــــــ :

أوجد قيمة مفكوك المحدد الآتي

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل:

باستخدام عناصر الصف الأخير في إيجاد مفكوك المحدد، نجد أن:

$$\Delta=0\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$=0(3+40)-0(2+30)+0(16-18)=0$$

ملاحظه:يمكن الوصول إلى أن قيمه مفكوك هذا المحدد تساوي صفر.وباستخدام الخاصية السابقة مباشره بدون إيجاد المفكوك رياضياً بمعنى يتم تطبيق الخاصية مباشره :

الخاصية الثانية:

إذا احتوى محدد ما على صنفين أو عمودين متطابقين في القيمة فان قيمة المحدد تساوي صفراً

مثال:

اثبت أن مفكوك كل من المحددين الآتيين =صفر

$$|W|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :

-1 باستخدام عناصر الصف الأول نجد أن:

$$|W|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2(6-1)-3(4-3)+1(2-9)=2(5)-3(1)+1(-7)=10-3-7=0$$

www.ums-edu.com/distance

distance@ums-edu.com

Tel: +967- 01- 530380

2- باستخدام عناصر الصف الأول:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1(9+8)-2(-6+6)+1(-8-9)=$$

(17)-2(0)+1(-17)= 17 – 0-17=0

الخاصية الثالثة :

إذا احتوت عناصر أي صف أو عمود في محدد ما على عامل مشترك فأن قيمة مفكوك هذا المحدد تساوي العامل المشترك مضروبا في مفكوك المحدد.

الخاصية الرابعة:

في أي محدد إذا تبادل أي صفين أو عمودين متجاورين موضعهما ، فأن قيمة مفكوك المحدد الجديد تساوي نفس قيمة مفكوك المحدد الأصلي ولكن بإشارة مخالفة.

مثال: بفرض أن لدينا المحدد التالي:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

بإحلال الصفين الأول والثاني كل مكان الآخر نحصل على المحدد الجديد$|B|$ الاتي :

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر الصف الأول في المحدد $|A|$ وعناصر الصف الثاني في المحدد $|B|$ نجد ان قيمة

$|A|$=1×(-3-20)=-23

$|B|$=(-1)(-3-20)=(-1)×(-23)=23

$-|A|=+|B|$

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

الخاصية الخامسة:

إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف في محدد ما فأن قيمة المحدد لا تتغير.

مثال:

بفرض انه لدينا المحدد التالي:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \therefore\ \Delta_a = (3\times5-2\times4)=7$$

وبفرض أنه تم تحويل الصفوف إلى أعمدة كما يلي:-

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \therefore\ \Delta_a = (3\times5-4\times2) = 7$$

يلاحظ أن قيمه المحدد لم تتغير بعد أن تتم تحويل الصفوف إلى أعمدة.

الخاصية السادسة:

لا تتغير قيمه المحدد إذا ضرب أحد الصفوف أو الأعمدة بعدد معين وأضيف أو طرح من صف أو عمود آخر.

مثال:

بفرض انه لدينا المحدد التالي :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (15-8) = 7$$

(1) وبفرض أنه تم ضرب الصف الأول من العدد

(-1)وإضافة الناتج إلى الصف الثاني نلاحظ أن قيمه المحدد لم تتغير.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (9-2) = 7$$

(2) وبفرض انه تم ضرب العمود الثاني بالعدد (2) وإضافة الناتج إلى العمود الأول:

نلاحظ أن قيمه المحدد لم تتغير.

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 28 = 7$$

تمارين:

1) أوجد قيمة المحدد:

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2) اثبت أن مفكوك كل المحددين الآتيين = صفرا

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3) أعطي مثال على قيمة المحدد من الدرجة الثانية 2×2 اذا استبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف في محدد ما فان قيمة المحدد لا تتغير.

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380