الجمهورية اليمنية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العلوم الحديثة

كلية التعليم المفتوح وعن بعد

# الرياضة البحتة

## المحاضرة الرابعة



www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

## المعادلات

**تعريف المعادلة:**

هي عبارة عن علامة مساواة بين مقدارين جبريين حيث يتم وضع احد المقدارين في طرف والمقدار الآخر في الطرف الثاني وتستخدم علامة التساوي (=) للتعبير عن تساوي طرفي المعادلة.

- **معادلة الدرجة الأولى:**

وهي أبسط أنواع المعادلات الجبرية وتأخذ الشكل الآتي

$$Ax + b = 0$$

حيث

X : تمثل المتغير أو المجهول المطلوب إيجاد قيمته

a : تمثل معامل x وتأخذ قيمة ثابتة $(a \neq 0)$

b: تمثل الحد المطلق (المقدار الثابت)

وتعد المعادلة من الدرجة الأولى في حالة إذا كانت قوة (أس) (x) في المعادلة مساوية للواحد الصحيح.

ويتمثل حل المعادلة من الدرجة الأولى بإيجاد قيمة المتغير (x)التي تحقق هذه المعادلة ولحل المعادلة فانه يتم نقل الحد المطلق (b) إلى الطرف الأيمن للمعادلة وكالاتي:ـ

$$ax = -b$$

بإضافة (-b) إلى طرفي المعادلة وبقسمة طرفي المعادلة على معامل المتغير (x) والمساوي ل (a) فانه يتم الحصول على حل المعادلة وكما يلي

$$X = \frac{-b}{a}$$

مثال:

حل المعادلات الآتية :

أ- $3x - 9 = 0$

ب- $\frac{1}{2}x + 12 = 0$

ج - $\frac{3}{2}x + \frac{4}{3} = 0$

الحل:

(أ) $3x - 9 = 0$



جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

بإضافة 9 إلى الطرفين

$3x = 9$

بقسمة الطرفين على 3

$X = 3$

(ب) $\frac{1}{2}x + 12 = 0$

بإضافة12- إلى الطرفين

$\frac{1}{2}x = -12$

بضرب الطرفين في 2

$x = -24$

ج – $\frac{3}{2}x + \frac{4}{3} = 0$

بإضافة$\frac{4}{3}$-إلى الطرفين

$x = -\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$

بضرب الطرفين $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}x = \frac{-4}{3} \times \frac{2}{3}$

$x = -\frac{8}{9}$ .

مثال:

حل المعادلة الآتية:

$x^2 + 2x - 99 = 0$

الحل:

يتم تحليل الطرف الأيسر إلى مقدارين كما يلي:

$(x+11)(x-9) = 0$

وعلى ذلك يكون:



www.ums-edu.com/distance

distance@ums-edu.com

Tel: +967- 01- 530380

إما $(x+11) = 0$

ومنها $x=-11$

أو $(x-9) = 0$

$X=9$

وعليه فان جذري المعادلة $(-11, 9)$.

- **معادلة الدرجة الثانية:**

نأخذ المعادلة من الدرجة الثانية الشكل التالي:

$$a x^2 + bx + c = 0$$

حيث $x$ تمثل المتغير أو المجهول المرفوع إلى القوة الثانية والمراد إيجاد قيمته:

$a$: تمثل معامل $x^2$ و$(a \neq 0)$.

$b$: تمثل معامل $x$ وتأخذ قيمة ثابتة .

$c$: تمثل الحد المطلق.

ولحل المعادلة من الدرجة الثانية فانه يوجد عدة طرق نذكر منها الآتي:

1- طريقة التحليل 2- طريقة القانون

مثال:

استخدم طريقة التحليل لإيجاد جذري معادلة الدرجة الثانية لحل المعادلة الآتية:

$$10x^2 - 29x=-10$$

الحل:

$$10x^2 - 29x+10=0$$

$$(2x-5)(5x - 2)=0$$

$$X=\frac{5}{2}$$

$$5x - 2=0$$

$$X=\frac{2}{5}$$

الجذران هما $(\frac{5}{2}, \frac{2}{5})$



www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

**(2) استخدام طريقة القانون لإيجاد جذري معادلة الدرجة الثانية:**

من خلال الشكل العام لمعادلة الدرجة الثانية والمعاد كتابته كالآتي:

$$ax^2+bx+c=0$$

فانه يتم الحصول على جذري المعادلة وذلك باستخدام القانون الآتي

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ومن هذا القانون لمعادلة جذران حقيقيان هما

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

حيث أن قيمة $\Delta=b^2-4ac$

وتسمى $\Delta$ بالمميز ويرمز لها بالرمز $\Delta$ وتقرا دلتا

وعليه يمكننا هنا نفرق بين الحالات الثلاثة الآتية

أ) إذا كان المميز موجب$(\Delta>0)$ يكون للمعادلة جذرين مختلفين هما

$$X_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

ب) إذا كان المميز يساوي صفر $(\Delta=0)$ يكون للمعادلة جذرين متساويين أي بمعنى آخر للمعادلة جذر للمعادلة جذر واحد يقال له جذر أو مضاعفا (مكرر) $X_1=x2=\frac{-}{2a}$

ج) إذا كان المميز سالبا $(\Delta<0)$ لا يكون للمعادلة جذرين حقيقيين أي بمعنى آخر للمعادلة جذرين تخيليين.

مثال:

أوجد جذري المعادلة الآتية:

$$4x^2-16x+15=0$$

$$A=4,\quad b=-16,\quad c=15$$

ثم تحسب قيمة $(\Delta)$فنجد أن:ـ

$$(\Delta)=b^2-4ac$$

$$(-16)^2-4.4.15$$

$$\Delta=256-240=16>0$$



جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد

www.ums-edu.com/distance

distance@ums-edu.com

Tel: +967- 01- 530380

$\therefore \Delta > 0$

$\therefore \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

ولذا يكون للمعادلة جذران مختلفين هما:

$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\therefore X_1 = \frac{-(-16) \pm 4}{8}$

$X_1 = \frac{+16+4}{8} = \frac{5}{2}$

$X_2 = \frac{+16-4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

مثال:

أوجد جذري المعادلة الآتية:ـ

$x^2 + 5x + 6 = 0$

الحل:

$a=1 \;, \; b=5, \;\; c=6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\therefore \Delta = (5)^2 - 4 \times 1 \times 6$

$= 25 - 24 = 1 > 0$

$\therefore \Delta > 0$

للمعادلة حلان (جذران)حقيقيان مختلفان هما

$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{1}}{2}$

$= \frac{-4}{2} = -2$

$X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{1}}{2}$

$= \frac{-6}{2} = -3$

∴حل المعادلة جذران مختلفين هما 2- , 3-



www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

مثال :

أوجد جذري المعادلة التالية:

$X^2 + x = 1$

الحل:

نحول المعادلة إلى الصورة العامة:

$x^2 + x + 1 = 0$

$a=1,\ b=1,\ c=1$

$\therefore\ \Delta = (1)^2 - 4\times1\times1 = 1 - 4 = -3 < 0$

$\therefore\ \Delta < 0$

∴ المعادلة مستحيلة الحل في IR

أي أن مجموعة الحل = $\emptyset$

- **العلاقة بين جذري المعادلة من الدرجة الثانية ومعاملاتها:**

مجموع جذري المعادلة:

$\sum_{i=1}^{2} x_i = x_1 + x_2$

هو

$\sum_{i=1}^{2} x = \frac{-b}{a}$

بمعنى انه هو = $\frac{-\text{معامل}\,x}{\text{معامل}\,x^2}$

وحاصل ضرب الجذرين هو $\prod_{i=1}^{2} x_i = x_1 . x_2$

$\prod_{i=1}^{2} x_i = \frac{c}{a}$ .............

بمعنى أن = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل}\,x^2}$

ومن المجموع للجذرين وحاصل ضرب الجذرين يمكننا كتابة معادلة الدرجة الثانية بدلالة مجموع وحاصل ضرب جذريها وعلى الشكل التالي

$X^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2$ or $x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

ومن هذه العلاقة يمكننا تكوين معادلة الدرجة الثانية في حالة إذا علم جذراها.

مثال:

أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة:

$2x^2 - 7x+3=0$

الحل:

$a=2$ , $b=-7$, $c=3$

مجموع جذري المعادلة = $\frac{-b}{a}$

$= \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

وحاصل ضرب جذري المعادلة = $\frac{b}{a}$

$=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

مثال:

كون المعادلة التي جذريها($-5,\frac{1}{2}$)

مجموع الجذرين = $-5+\frac{1}{2}$

$=\frac{-10+1}{2} = \frac{-9}{2}$

حاصل ضرب الجذرين = $-5 \times \frac{1}{2}$

$=\frac{-5}{2}$

∴ المعادلة من القانون الاتي يمكن تكوينها

$X^2 - (\frac{-9}{2})x + \frac{-5}{2}=0$

بضرب طرفي المعادلة في2

$2x^2 + 9x - 5 = 0$

- **مجموع المعادلات الخطية**

المعادلة الخطية من الدرجة الأولى تكون

$ax + b = 0$


www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

وحل المعادلة هو= $x = \frac{-b}{a}$

أما في حالة التعامل مع معادلة خطية (n)من المجاهيل فيمكن التعبير عن شكلها العام كالآتي

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_nx_n = b$

حيث $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ تمثل (n) من المجاهيل في المعادلة

أما $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ تمثل (n) من معادلات المجاهيل بالترتيب.

أما b فهو الحد المطلق

أما في حالة إذا كان لدينا (m)من المعادلات الخطية بها (n) من المجاهيل فإننا نحصل على

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{in}x_n = bi$

حيث أن المجموعة الآتية للمعادلات هي مجموعة مستقلة

مثلا:

$$X + y = 3$$

$$x - y = 1$$

وذلك لأننا لا يمكن أن نشتق إحدى المعادلات من الآخر ، في حين مجموعة المعادلات الآتية فهي مجموعة غير مستقلة من المعادلات

$4x+6x=42\ldots\ldots\ldots(1)$

$2x+3y=21\ldots\ldots\ldots(2)$

يلاحظ من أعلاه انه يمكن اشتقاق المعادلة رقم (1) من ضعف المعادلة رقم (2) وهناك عدة طرق لإيجاد الحل المشترك لمجموعة المعادلات الخطية وتتمثل بالاتي :ـ

1) طريقة التعويض
2) طريقة الحذف
3) طريقة المحددات
4) طريقة المصفوفات

أولا سوف نستخدم في الحل الطريقة الأولى:

وهي طريقة التعويض كما في المثال الآتي:

مثال:

حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:


www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

$3x+2y=106$.........(1)

$2x+4y=92$..........(2)

الحل

باستخدام طريقة التعويض:

وفي هذه المعادلة رقم (1)يتم إيجاد قيمة المجهول(x) بمعلومية المجهول (y) كالآتي:

$3x+2y=106$

$\therefore x=\frac{106-2y}{3}$...........(3)

وبالتعويض عن قيمة (x) في المعادلة رقم (2)فنحصل على قيمة المجهول (y) وكما يلي:

$2x+4y=92$

$2(\frac{106-2y}{3})+4y=92$

بالضرب في 3

$2(106-2y)+12y=276$

$212+8y-276=0$

$8y-64=0$

$8y=64$

$Y=8$...........(4)

وبالتعويض عن قيمة (y)في المعادلة (4) بما يساويها في المعادلة رقم (3) أو أي من المعادلتين (1) أو (2)

فمن المعادلة رقم (2)

$2x+4y=92$

$2x+4\times 8=92$

$2x+32=92$

$2x=92-32$

$2x=60$ بالقسمة على 2

$X=30$

**تمارين**

**(1) حل المعادلات الآتية:**

أ) $\frac{5}{6}x - \frac{7}{8} = 0$

ب) $\frac{3}{7}x + \frac{5}{8} = 0$

**(2) حل المعادلات الآتية بطريقة التحليل:**

أ) $6x^2 + 37 + 45 = 0$

ب) $x^2 - x - 6 = 0$

**(3) أوجد جذري المعادلات الآتية بطريقة القانون:**

أ) $x^2 - 6x + 13 = 0$

ب) $x^2 - 8x + 16 = 0$

**(4) كون المعادلة التي جذراها هما:**



www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

أ) $(-2, 5)$

ب) $(-4, 4)$

**(5) استخدم طريقة الحذف لحل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:**

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 6$ ............(1)

$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = 5$ ............(2)


جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380