الجمهورية اليمنية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العلوم الحديثة

كلية التعليم المفتوح وعن بعد

جامعة العلوم الحديثة
UNIVERSITY OF MODERN SCIENCES

الرياضة البحتة

المحاضرة السادسة

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

المصفوفـــات

مفهوم المصفوفة:

المصفوفة هي منظومة من العناصر مرتبة في شكل صفوف وأعمدة. فإذا كانت المصفوفة لها عدد (m) من الصفوف؛ وعدد (n) من الأعمدة قيل أن المصفوفة من الدرجة m×n.

وسوف نستخدم حروفا مثل ...A,B,C لكي ترمز للمصفوفة؛ وحروفاً مثل ...a,b,c لكي ترمز لعناصر المصفوفة.

فمثلاً المصفوفة (A) والتي تحتوي على عناصر مرتبة في m صفاً؛ وnعموداً تكتب في الصورة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أن (m) هو دليل الصف و(n) دليل العمود والعنصر a_{mn} هو العنصر الموجود في الصف (m) والعمود (n) في المصفوفة.

وتتحدد أبعاد المصفوفة بعدد صفوفها وعدد أعمدتها فالمصفوفة السابقة تسمى (m×n) أي بها (m) صفاً و (n) عموداً.

*** أنواع المصفوفات:**

1- المصفوفة المربعة:

يقال للمصفوفة من الدرجة m×n أنها مربعه إذا كان عدد الصفوف فيها مساوياً لعدد الأعمدة أي أن (m=n).

مثـــال:

المصفوفة التالية مصفوفة مربعة لتساوي عدد الصفوف والأعمدة فيها:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{bmatrix}$$

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

2- المصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها عبارة عن أصفاراً ماعدا عناصر القطر الرئيسي؛

أي أن عناصر المصفوفة تكون في الصورة التالية:

$$a_{ij} = o \qquad , \qquad /i = j$$

مثـــال:

إذا كانت المصفوفة (c) على الصورة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن (c) تكون مصفوفة قطرية عناصرها القطرية هي :

{2 3 1}

3- مصفوفة الوحدة:

هي مصفوفة مربعة جميع العناصر التي تقع على القطر الرئيسي تساوي الواحد الصحيح وبقية العناصر تساوي أصفاراً ويرمز لمصفوفة الوحدة بالرمز (i).

أي أن عناصر المصفوفة تكون في الصورة التالية:

$$a_{ij} = 1 \ , \ i = j, \ a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j$$

مثـال:

نكتب مصفوفة الوحدة (i) على الصورة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}_{3\times3}$$

4- المصفوفة القياسية:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها متساوية وتساوي مقدار ثابت (K) وبقية عناصرها صفرية أي أن عناصر المصفوفة تكون على الصورة التالية:

$$a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j, \ a_{ij} = K \ , \ i = j$$

مثـــال:

إذا كانت المصفوفة( ) على الصورة التالية:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

فإن (D) مصفوفة قياسية من الدرجة 4×4 .

5- المصفوفة الصفرية:

هي مصفوفة جميع عناصرها أصفاراً

إذا كانت المصفوفة (W) في الصورة:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فان W مصفوفة صفرية من الدرجة n × m ويرمز لها بالرمز w

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

- المصفوفة المثلثية:6

هي مصفوفة مربعه منقسمة إلى مثلثين فيها عناصر أحد المثلثين (ويشمل عناصر القطر) ويحتوي على أرقام والمثلث الآخر (بدون عناصر القطر) جميع عناصره تساوي أصفاراً وبذلك يكون لدينا نوعين من المصفوفات المثلثية

***المصفوفة المثلثية العليا:**

هي المصفوفة التي فيها العناصر القطرية والعناصر العليا تحتوي على أرقام وباقي العناصر أسفل القطر جميعها أصفارا.

مثال:

علي الصورة التالية: U اذا كانت المصفوفة

$$U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

فان U مصفوفة مثلثية عليا من الدرجة 3×3 . ويمكن التعبير عن هذه المصفوفة باستخدام الأرقام كما يلي :

$$U=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

***المصفوفة المثلثية السفلى:**

هي المصفوفة التي فيها العناصر القطرية والعناصر أسفل القطر تحتوي على أرقام وباقي العناصر أعلى جميعها أصفارا.

مثال:

إذا كانت المصفوفة M على الصورة التالية:

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فان M مصفوفة مثلثية سفلى من الدرجة 3×3 . ويمكن التعبير عن هذه المصفوفة باستخدام الأرقام كما يلي:

$$M=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

7- المصفوفة المتماثلة:

هي عبارة عن مصفوفة مربعة تتساوى فيها العناصر المتناظرة أعلى القطر و أدنى القطر الرئيسي الذي يتجه من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين.

مثال:

إذا كانت المصفوفة A على الصورة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3\times3 \end{bmatrix}$$

ولكي تكون هذه المصفوفة متماثلة يجب أن تكون العناصر أعلى القطر و أدنى القطر في الصورة:

$a_{12}=a_{21}$,$a_{13}= a_{31}$,$a_{23}=a_{32}$

مثال:

المصفوفة التالية مصفوفة متماثلة:

$$A= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

وذلك لان الأرقام المتناظرة أعلى و أدنى القطر الرئيسي المتجه من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين متساوية.

- **العمليات الجبرية على المصفوفات:**

1- تساوي المصفوفات:

يقال للمصفوفتين "A, B" أنهما متساويتان إذا تحقق شرطان:

أ- عدد الصفوف والأعمدة في المصفوفتين متساوية.

ب- العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية.

مثال:

بفرض انه لدينا المصفوفتين:

$$\underset{3\times2}{B=}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \underset{2\times3}{A=}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد

www.ums-edu.com/distance

distance@ums-edu.com

Tel: +967- 01- 530380

يلاحظ أن المصفوفتين من نفس الدرجة (2×2) وان جميع العناصر المتناظرة متساوية وبالتالي فان المصفوفتين متساويتين.

أما إذا اختلفت درجة المصفوفتين فلا يتحقق التساوي بينهما حتى وان تساوت العناصر المتناظرة بينهما، مثل المصفوفتين التاليتين:

$$C=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} \quad , \quad D=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

فالمصفوفة [[D] ≠ C]،حيث أن المصفوفة الأولى 3×2 بينما المصفوفة الثانية من الدرجة 2×3 وبذلك لا يتحقق التساوي.

كذلك لا يتحقق التساوي بين المصفوفات إذا اختلفت العناصر المتناظرة فيها حتى وان تساوت الدرجة.

مثال:

بفرض انه لدينا المصفوفتين:

$$E=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad , \quad W=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

فان المصفوفة [E] ≠ [W] فبالرغم من أن المصفوفتين من الدرجة 2 × 2 ولكن بمقارنة العناصر المتناظرة نجد أنها غير متساوية. وبذلك لا يتحقق التساوي.

ومن خاصية التساوي بين المصفوفات يمكن الحصول على قيمة المتغيرات المجهولة في كل منها. فمثلا المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ z & m \end{bmatrix}$$

فلكي تتساوى لابد من أن يتحقق الشرطين:

*تساوي درجة المصفوفة. فالمصفوفة [A] من الدرجة 2 ×2 والمصفوفة [B] من الدرجة2 ×2.

*تساوي العناصر المتناظرة في كل من المصفوفتين:

X=2 , y=5 , z=1 , m=4

- **جمع المصفوفات:**

يمكن جمع المصفوفات إذا كانت جميعها من نفس الدرجة، أي أن الشرط اللازم والكافي لكي يمكن جمع المصفوفتين[A, B] هو أن تكون كلا منهما من نفس الدرجة، أي نفس الصفوف وعدد الأعمدة. فإذا كانت المصفوفة [A] من الدرجة [m, n] وكل عنصر من عناصرها عبارة عن مجموع العنصرين المتناظرين في المصفوفتين [A, B].

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

مثال:

أوجد حاصل جمع المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}20 & 15 & 8\\ 21 & 10 & 14\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}12 & 14 & 25\\ 13 & 16 & 7\end{bmatrix}$$

$$D=A+B=\begin{bmatrix}20 & 15 & 8\\ 21 & 10 & 14\end{bmatrix}+B=\begin{bmatrix}12 & 14 & 25\\ 13 & 16 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20 & 12 & 1514 & 8 & 25\\ 7 & 14 & 9\ 6 & 14 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}32 & 29 & 33\\ 34 & 26 & 21\end{bmatrix}$$

- **عملية ضرب المصفوفات:**

يشترط لإجراء عمليات المصفوفات أن يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

فإذا كانت المصفوفة "A" علي النظام "m ×n" والمصفوفة "B" على "n ×1" (لاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة "A" يساوي عدد صفوف المصفوفة "B").

فان: $A \times B=C$

فمثلا:

حاصل ضرب المصفوفة [A] من الدرجة 3× 2 أصل ضرب المصفوفة [B] من الدرجة 2 ×3 يعطي مصفوفة جديدة [D] من الدرجة 2 × 2 كما يلي:

$$A \times B = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}_{2\times3} \times \begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$\underset{2\times2}{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}$$

مثال:

أوجد ناتج $A \times B$، إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 6\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

الحل:

A × B =

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2\times 1+1\times 0) & (2\times 2+1\times 3)\\(4\times 1+6\times 0) & (4\times 2+6\times 3)\end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن المصفوفة [A] من الدرجة (2 × 2) والمصفوفة [B] من الدرجة (2 × 2)، وبذلك يتحقق شرط الضرب ونحصل على مصفوفة من الدرجة (2 × 2).

مثال:

إذا كانت:

$$B=\begin{bmatrix}0 & 4\\5 & -2\\ _{2\times 3} & 3\end{bmatrix} \qquad , \quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & _{3\times 2}-1 & 5\end{bmatrix}$$

فبين أن [A , B] تقبلان الضرب وأوجد [ ] A × B.

الحل:

يلاحظ أن المصفوفة [A] من الدرجة (3 ×2) والمصفوفة [B] من الدرجة (3 ×2) وبذلك [A , B] تقبلان الضرب، وحاصل الضرب هو مصفوفة جديدة]C[من الدرجة (2 ×2).

∴A × B=

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & _{2\times 3}1 & 5\end{bmatrix} \quad \times \quad \begin{bmatrix}0 & 4\\5 & -2\\ _{3\times 2} & 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\times 0+2\times 5+3(-1) & 1\times 4+2(-2)+3\times 3\\-2\times 0-1\times 5+5(-1) & -2\times 4-1(-2)+5(3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 9\\ _{2\times 2}0 & 9\end{pmatrix}$$

- **خواص ضرب المصفوفات:**

القاعدة الأولى: ضرب المصفوفات عملية غير إبداليه:

يتحقق ضرب كل من المصفوفتين:

A×B, B×A

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

إذا كانت إحدى المصفوفتين على النظام (m × n) والأخرى على النظام (n × m).

مثال:

بفرض انه لدينا المصفوفتين

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

أولا: بين أن: كلا من (A×B, B×A) ممكنا.

ثانيا: أوجد كلا من (A×B, B×A)، وماذا تلاحظ.

الحل:

أولا: $\because \quad [A]_{3\times 2} \quad , \quad [B]_{2\times 3}$

$\therefore$ عملية الضرب ممكنة:

A×B, B×A

ثانيا:

$$A \times B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ 4 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22 & 35\\ 22 & 33\end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\\ 4 & 6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & 4 & 22\\ 3 & 0 & 4\\ 22 & 8 & 44\end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن:

A×B ≠ B×A

ومن ذلك نستنتج أن عملية الضرب غير إبداليه.

القاعدة الثانية: ضرب مصفوفة في مقدار ثابت (K).

يمكن لنا أن نضرب أي عدد في مصفوفة مهما كانت درجتها ويتم الضرب عن طريق ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.

جامعة العلوم الحديثة – التعليم المفتوح وعن بعد
www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

مثال:

أوجد قيمة:

$$4 \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \therefore = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

القاعدة الثالثة: ضرب في مصفوفة الوحدة

عند ضرب مصفوفة [A] في مصفوفة الوحدة [I] فان حاصل الضرب يكون عبارة عن المصفوفة الأصلية [A].

مثال:

أوجد حاصل ضرب المصفوفتين:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أننا حصلنا على المصفوفة الأصلية.

- **مبدل (مدور) المصفوفة:**

إذا كانت "A" مصفوفة درجتها $m \times n$ فان مدور المصفوفة "A" والذي يرمز له بالرمز (A) هو مصفوفة درجتها $n \times m$ ناتجة من المصفوفة "A" بعد تحويل صفوفها إلى أعمدة وأعمدتها إلى صفوف.

مثال:

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 10 \\ 12 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380

فان مبدل المصفوفةA هو:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 7 & -4 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

تمارين:

1) أعطي مثالا لكلا مما يأتي:

أ- المصفوفة القطرية.
ب- المصفوفة الصفرية.
ت- المصفوفة القياسية.
ث- المصفوفة المتماثلة.

2) إذا كانت المصفوفتان التاليتان متساويتان فأوجد قيمة كلا مما يأتي:
a, b, c, d

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ c & d \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3) أوجد حاصل جمع المصفوفتين:

$$B=\begin{bmatrix} 10 & 17 & 9 \\ 13 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} 15 & 13 & 10 \\ 12 & 8 & 15 \end{bmatrix}$$

4) بفرض انه لدينا المصفوفتين:

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A \times B$

www.ums-edu.com/distance
distance@ums-edu.com
Tel: +967- 01- 530380